Otokorelasyon Testleri

A Birinci Mertebe Testleri

i Non-parametrik Testler

1 İşaret (sıra) testi

* Tesadüfiliğin araştırılması için kullanılan parametrik olmayan bir testtir.

* Diziliş önemlidir. Sayısal büyüklük dikkate alınmaz. ÖR: Yazı-tura, Kusurlu-kusursuz, 0-1, vs gibi.

* Regresyonda artıkların ortalaması 0-dır. Artıkların bir kısmı (-) ve diğer kısmı ise (+)-dır. Bu nedenle regresyon artıklarına sıra testi uygulanabilir.

$H_0: \rho = 0 \Rightarrow$ OK YOK
$H_1: \rho \neq 0 \Rightarrow$ OK VAR

ÖRNEK: Regresyon sonucunda oluşan (-) artıklar için 0 (+) artıklar için 1 yazdığımızı düşünelim. Artıklar sırasıyla aşağıdaki gibi olsun

$$\underbrace{0\,0}_{1}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{0}_{1}\ \underbrace{1\,1\,1\,1}_{1}\ \underbrace{0\,0\,0}_{1}\ \underbrace{1\,1}_{1}\ \underbrace{0\,0}_{1}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{0}_{1}$$

(+) işaret + 1-ler $\Rightarrow n_1 = 8$
(-) işaret + 0-lar $\Rightarrow n_2 = 9$

sıra: ard arda gelen aynı verilerin oluşturduğu toplam dize sayısı

$D = 9 \rightarrow 0 \Rightarrow 5$ tane
$\quad\ \ \rightarrow 1 \Rightarrow 4$ tane

α = anlamlılık seviyesi

* Belirli bir anlamlılık seviyesinde "Sıra Testi Tablosu"na bakılır.
* Tablo VI-a-dan bulunan test kritik değerinden küçük ya da Tablo VI-b-den bulunan test kritik değerinden büyük D değeri elde edilmişse Ho red edilir ve OK var sonucuna ulaşılır. Eğer D değeri (test-değeri) eğer kritik değerlerin arasındaysa Ho red edilemez ve OK Yok sonucuna ulaşılır.

② χ^2 Yardımcı testi

* Parametrik olmayan bir testtir.

$H_0: \rho = 0 \Rightarrow$ OK YOK

$H_1: \rho \neq 0 \rightarrow$ OK VAR

* Durbin Watson (DW-d) testine yardım için kullanılır.

* χ^2 istatistiğini hesaplamak için tablo oluşturmak gereklidir. Tablo ard arda gelen artıkların işaretleri incelenerek oluşturulur.

		U_t		Toplam
		(+)	(−)	
U_{t-1}	(+)	a	b	a+b
	(−)	c	d	c+d
	Toplam	a+c	b+d	

$U_t \Rightarrow$ t dönemi işareti

$U_{t-1} \Rightarrow$ t-1 dönemi işareti

* a, b, c, d değerleri işaretlere göre birer arttırılarak tüm gözlemler için belirlenir.

ut	a.b,c,d
—	— } ⇒ kayıp
—	d=1
—	d=2
+	c=1
—	b=1
+	c=2
+	a=1
—	b=2

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2 \cdot (n-1)}{(a+c)\cdot(a+b)\cdot(c+d)\cdot(b+d)}$$

→ dağılımı χ^2 -dir

serbestlik derecesi

$$sd = \left(\begin{matrix}\text{satır}\\ \text{sayısı}\end{matrix} - 1\right) \cdot \left(\begin{matrix}\text{sütun}\\ \text{sayısı}\end{matrix} - 1\right)$$

→ $\chi^2_{\alpha, sd}$ dağılımı

α = anlamlılık düzeyi

n = veri sayısı

* IV- Ki Kare tablosundan kritik değer bulunup test değeri ile karşılaştırılır.

kritik-değer > $\lambda^2_{\alpha,1}$ ise Ho red edilemez OK YOK

kritik-değer < $\lambda^2_{\alpha,1}$ ise Ho red edilir OK VAR

---

(11) Parametrik Testler

(1) Durbin Watson (DW-d) Testi

* Otokorelasyon denilince akla gelen ilk testtir.
* Birinci dereceden otokorelasyon için kullanılır.
* Uygulanabilmesi için modelde sabit terimin olması gerekir. Eğer yoksa $\Sigma \hat{u}_t$ sıfır olmaz ve $R^2 < 0$ olabilir. Modelde sabit terim olmadığında Kramer ya da Farebrother özel tablosu kullanılır.
* Eksik veri durumunda geçersizdir.
* Değişken ve örnek birim sayısına göre tablo değeri değişir.
* AR modellerde DW-d sistematik hatalı sonuçlar verir. Bu nedenle AR modellerde diğer testler kullanılır
  ↳ DW-h ve Durbin alternatif testleri

$$y_t = B_0 + B_1 X_t + u_t$$

$$d = \frac{\sum_{t=2} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1} \hat{u}_t^2}$$

$H_0: \rho = 0 \Rightarrow$ Birinci dereceden OK YOK

$H_1: \rho \neq 0 \Rightarrow$ Birinci dereceden OK VAR

Testin Mantığı

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^2 + \sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

* Zaman serilerinde daha çok (+) OK olacağı düşünülürse d-nin büyüklüğü açıklanabilir.

* Gözlem sayısı yeterince büyük olursa

$$\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^2 \cong \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2 \cong \sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2$$

$$d = 1 + 1 - 2\left(\frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2} \right) \longrightarrow \hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

$$\hat{\rho} = Corr(\hat{u}_t, \hat{u}_{t-1}) = \frac{E[\hat{u}_t - E(\hat{u}_t)][\hat{u}_{t-1} - E(\hat{u}_{t-1})]}{\sqrt{Var(\hat{u}_t)}\sqrt{Var(\hat{u}_{t-1})}}$$

$$= \frac{E[\hat{u}_t \hat{u}_{t-1}]}{Var(\hat{u}_t)}$$

$$= \frac{E(\hat{u}_t \hat{u}_{t-1})}{E[\hat{u}_t - \underbrace{E(\hat{u}_{t-1})}_{=0}]^2}$$

$$= \frac{E[\hat{u}_t . \hat{u}_{t-1}]}{E[\hat{u}_t^2]}$$

$$= \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

$$d = 2 - 2\hat{\rho}$$

$$d = 2(1 - \hat{\rho})$$

OK teorik olarak $-1 \leq \rho \leq 1$ arasında olacağından.

(+) OK $\Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow d = 2(1-\hat{\rho}) = 0 \Rightarrow$ min

OK YOK $\Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow d = 2(1-\hat{\rho}) = 2$

(−) OK $\Rightarrow \rho = -1 \Rightarrow d = 2(1-\hat{\rho}) = 4$ max

* d-istatistiği dağılımı bağımsız değişken sayısı, gözlem sayısı ve bağımsız değişkenlerin değerlerine göre değişir. Bu nedenle d-istatistiğinin dağılımı örneklemden örnekleme değişir. Bu sebeple yaklaştırmalar ile kritik değerler belirlenir.

(+) OK için alt ve üst sınır kritik değerleri belirlenmiştir ve bağımsız değişkenlerin etkisi kaldırılmıştır.

$H_0: \rho = 0$

$H_1: \rho > 0$

* du: üst limit ; d_L: alt limit ; d: hesaplanan test değeri

$d > d_u$ => Ho red edilemez OK YOK

$d < d_L$ => Ho red edilir (+) OK VAR

$d_L < d < d_U$ -> Karar verilemez => yardımcı testlerden yararlanılır ya da sonuçtan emin olmak için d-kritik değeri özel olarak hesaplanır.

(−) OK için alt ve üst sınır kritik değerleri belirlenmiştir ve bağımsız değişkenlerin etkisi kaldırılmıştır.

$H_0: \rho = 0$

$H_1: \rho < 0$

* du: üst limit ; d_L: alt limit ; d: hesaplanan test değeri

$d < 4 - d_u$ => Ho red edilemez OK YOK

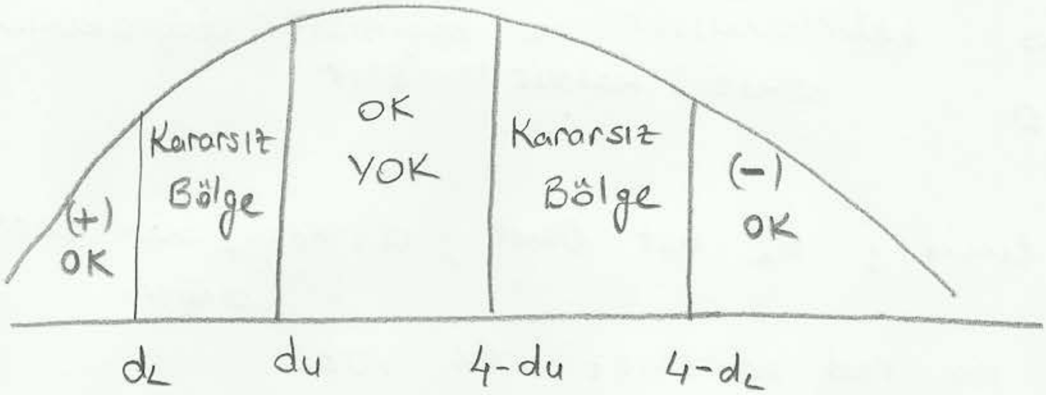
$d > 4 - d_L$ => Ho red edilir (−) OK VAR

$4 - d_u < d < 4 - d_L$ => Karar verilemez => yardımcı testlerden yararlanılır ya da sonuçtan emin olmak için d-kritik değeri özel olarak hesaplanır.

* (+) OK ve (−) OK için olan testleri birleştirip çift taraflı teste dönüştürürsek...

$H_0: \rho = 0 \Rightarrow$ OK YOK

$H_1: \rho \neq 0 \Rightarrow$ OK VAR



* d_L ve d_u değerleri α (anlamlılık düzeyi) ile tablodan bulunur. Tabloda k = bağımsız değişken sayısı (sabit parametre hariç) ve n ise gözlem (veri) sayısıdır.

* d_L ve d_u kritik değerlerini bulmak için Tablo-7a ve Tablo-7b'yi kullanabilirsiniz. (Durbin-Watson Tabloları)

* Tablolardan da görüldüğü üzere DW-d testi $n \geq 15$ ise kullanılır. Eğer $n < 15$ ise Durbin-Watson tablosu yerine Savin-White tablosunun kullanılması gerekir. Tablo-7a, 7b ve 7c (Savin-White Tabloları).

* Önemli not: d istatistiği ile $\hat{\rho}$ hesaplanabilir.

$$d \cong 2(1-\hat{\rho})$$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{d}{2} \Rightarrow \text{büyük örneklem için}$$

$$\hat{\rho} = \frac{n\left(1-\frac{d}{2}\right) + k^2}{n^2 - k^2} \Rightarrow \text{küçük örneklem için}$$

* Durbin-Watson (Dw-d) testinde kararsız bölge en büyük problemdir. Bu durumda ilk basta yardımcı testlerden yararlanılır, fakat bu testlere güven olmayabilir.
  - ↳ Dw-d kararsız bölgeye düşerse ⇒ N büyütülmeli, Bovenblutt-Webb testi ya da kesin Durbin watson testi kullanılabilir.
  - ↳ Literatürde bazen kararsız bölge OK varmış gibi yorumlanır ve kesin sonuca ulasılmış olur.

Durbin-h Testi

* Dw-d testi AR(1) modellerinde yani bağımsız değişkenler arasında gecikmeli bağımlı değişken yer alıyorsa geçerli olmaz. Bu durumda Dw-h testi kullanılabilir.
* Bu test büyük örneklem için geçerlidir.

$H_0: \rho = 0$ ⇒ Birinci dereceden OK YOK

$H_1: \rho \neq 0$ ⇒ Birinci dereceden OK VAR

* Dw-h istatistiği asimtotik olarak standard normal dağılım yaptığından, kritik değer hesaplaması için standard normal tablosu kullanılır.

n = gözlem sayısı

$\hat{\rho}$ = otokorelasyon katsayısı tahmini

d = Dw-d istatistik değeri

$Var(\hat{B})$ = gecikmeli bağımlı değişkenin varyansı (tahmin)

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + \underline{B} Y_{t-1} + u_t$$

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - n\,Var(\hat{B})}}$$

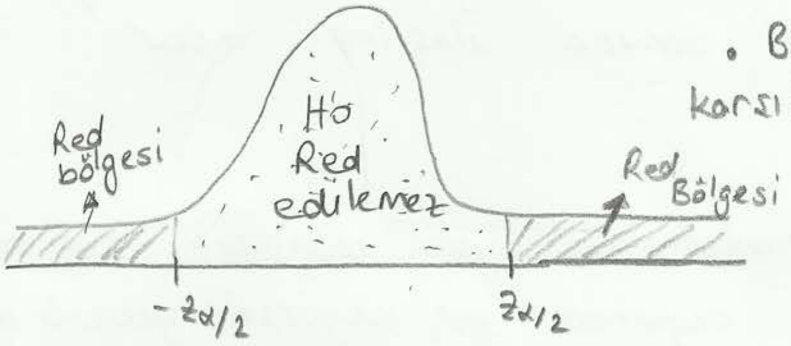
$\hat{\rho} \doteq 1 - \frac{d}{2}$ ⇒ büyük örneklem testi olduğu için

$$h = \left(1 - \frac{d}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\,Var(\hat{B})}}$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1})}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$ ⇒ ile hesaplanabilir

* Eğer $n\,Var(\hat{B}) \geq 1$ olursa payda sıfır veya negatif olacağından test değeri hesaplanamaz ve durbin - alternatif testi kullanılır

α = anlamlılık düzeyinde



- $z\alpha/2$ ve $-z\alpha/2$ bulunur
- Bu değerler h-değeri ile karşılaştırılır.
- $-z\alpha/2 < h < z\alpha/2$ ise Ho red edilemez $\Rightarrow$ OK YOK
- $h < -z\alpha/2$ ya da $h > z\alpha/2$ ise Ho red edilir OK VAR.

Durbin - Aternatif Testi

* D-h testinde $n\,Var(\hat{B}) \geq 1$ çıkması durumunda ek olarak ya da bağımsız olarak kullanılır.
* AR(q) modellerinde kullanılır. $\Rightarrow$ Birinci derece ya da daha yüksek derece.
* Yüksek dereceden OK testi için kullanılır.

Yöntem

- OK olup olmadığına karar vermek için incelenen (ana model) modelin artıkları tahmin edilir $\Rightarrow \hat{u}_t$
- Bağımlı değişken $\hat{u}_t$ olacak şekilde yardımcı AR(q) modeli oluşturulur.
- Oluşturulan yardımcı AR(q) modeline ana modelin tüm bağımsız değişkenleri ve $\hat{u}_t$-nin gerekli görülen gecikmeli değişkenleri bağımsız değişken olarak eklenir.

★ Ana model : $y_t = B_0 + B_1 y_{t-1} + B_2 X_t + u_t \rightarrow \hat{u}_t$ hesaplanır

• 1. dereceden OK Testi

yardımcı model $\Rightarrow \hat{u}_t = \delta_0 + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \delta_1 y_{t-1} + \delta_2 X_t + \varepsilon_t$

$H_0: \rho_1 = 0 \Rightarrow$ 1. dereceden OK YOK
$H_1: \rho_1 \neq 0 \Rightarrow$ 1. dereceden OK VAR

Katsayılara t-testi ile anlamlılık testi yapılır.

$$t = \frac{\hat{\rho}_1 - \rho_1}{se(\hat{\rho}_1)}$$

• Yüksek dereceden OK Testi

yardımcı Model
↳ $\hat{u}_t = \delta_0 + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \dots + \rho_s \hat{u}_{t-s} + \delta_1 y_{t-1} + \delta_2 X_t + \varepsilon_t$

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_s = 0 \Rightarrow$ OK YOK
$H_1: \underbrace{H_0 \text{ doğru değil}}_{\text{en az biri sıfırdan farklı}} \Rightarrow$ OK VAR

$\Rightarrow$ F testi ile yapılır

★ Eğer f-testi sonucunda H_0 red edilirse t-testi ile tüm derecelerin durumu tek tek test edilir. örneğin $\hat{\rho}_1$ anlamsız fakat $\hat{\rho}_2$ anlamlı ise hata terimleri arasında 2. dereceden OK olduğu sonucuna varılır.

$$\hat{u}_t = \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon \Rightarrow AR(2)$$

$$F = \frac{(R^2_{ur} - R^2_r)/9}{(1 - R^2_{ur})/(n-k-1)}$$

R^2_{ur} = Kısıtlanmamış modelin determinasyon katsayısı

R^2_r = Kısıtlanmış modelin determinasyon katsayısı

$F \sim F_{\alpha, 9, n-k-1}$

sd1 = 9
sd2 = n-k-1